Előbb-utóbb átmegyek a vizsgán?
(Megoldás)

Ha (k-1)-szer megbuktam, akkor annak a valószínűsége, hogy a k-adik vizsgán átmegyek – a feladat szövege szerint –

az a) esetben

$$p\,,$$

a b) esetben

$$\frac{1}{k+1},$$

a c) esetben

$$\frac{1}{2^{k+1}+2}.$$

Ezért, ha (k-1)-szer megbuktam, akkor annak a valószínűsége, hogy a k-adik vizsgán is megbukom

az a) esetben

$$1-p\,,$$

a b) esetben

$$1-\frac{1}{k+1}=\frac{k}{k+1},$$

a c) esetben

$$1-\frac{1}{2^{k+1}+2}=\frac{2^{k+1}+1}{2^{k+1}+2}=\frac{1}{2}\,\frac{2^{k+1}+1}{2^{k}+1}.$$

Annak a valószínűsége, hogy az első n vizsga mindegyikén megbukom, ezekből a valószínűségekből szorzással számolható ki. A k=1,2,3,…,n –re vett értékeket kell összeszorozni. A szorzatra

az a) esetben

$$(1-p)^{n},$$

a b) esetben

$$\frac{1}{2}\,\frac{2}{3}\,\frac{3}{4}\cdots\frac{n}{n+1}=\frac{1}{n+1},$$

a c) esetben

$$\frac{1}{2}\,\frac{2^{2}+1}{2^{1}+1}\;\frac{1}{2}\,\frac{2^{3}+1}{2^{2}+1}\;\frac{1}{2}\,\frac{2^{4}+1}{2^{3}+1}\cdots\frac{1}{2}\,\frac{2^{n+1}+1}{2^{n}+1}=(\frac{1}{2})^{n}\,\frac{2^{n+1}+1}{3}$$

adódik. Annak a valószínűsége, hogy mindig megbukom, ezekből határértékként adódik, ami az a) és b) esetekben nyilván 0, a c) esetben pedig 2/3.

Tehát **annak a valószínűsége, hogy előbb-utóbb átmegyek a vizsgán, az a) és b) esetekben 1, a c) esetben pedig csupán 1/3.**

Mivel a c) esetben a vizsgák száma pozitív valószínűséggel végtelen, a vizsgák átlagos száma végtelennel egyenlő.

Annak meghatározásához, hogy az a) és b) esetekben átlagosan hány vizsgára van szükség a sikerhez, kiszámoljuk annak a valószínűségét, hogy a siker éppen az n-ik próbálkozásnál következik be. Annak a valószínűsége, hogy (n-1)-szer megbukom, és az n-ik vizsgán átmegyek, szintén szorzatként számítható. A szorzat

az a) esetben

$$(1-p)^{n-1}p\ ,$$

a b) esetben

$$\frac{1}{2}\,\frac{2}{3}\,\frac{3}{4}\cdots\frac{n-1}{n}\;\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n\,(n+1)}\ .$$

A keresett átlag a most kapott eloszlások várható értéke.

Az a) esetben a p paraméterű geometriai eloszlásról van szó, melynek várható értéke a paraméter reciproka, vagyis 1/p. Tehát az egyes hallgatók sikeres vizsgájához szükséges próbálkozások számának az átlaga körülbelül 1/p lesz, ha sok hallgató alkalmazza ezt a taktikát. Vegyük észre, hogy ha p tart 0-hoz, akkor 1/p végtelenhez tart. Tehát – bár a hallgatók előbb-utóbb biztos átmennek a vizsgán – a **a sikeres vizsgához szükséges próbálkozások számának az átlaga <u>nagyon nagy</u>, ha p elég kicsi.**

A b) esetben a várható érték

$$\sum_n n\,\frac{1}{n\ (n+1)}=\sum_n\ \frac{1}{n+1}\ ,$$

ami – lévén egy divergens sor – eredményül végtelent ad. Ezért a b) esetben a biztos siker csak olyan sok próbálkozás árán érhető el, hogy **a sikerhez szükséges próbálkozások számának még az átlaga is <u>végtelenhez tart</u>, ha egyre több és több hallgató alkalmazza ezt a taktikát.**

2002. május

Vetier András